

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2025

Εξεταζόμενο μάθημα:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΠΑ.Λ.

Ημερομηνία:
03 – 06 – 2025

Ώρα ανάρτησης:
11:00



ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Φροντιστήριο Μέσης Εκπαίδευσης



ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελ. 93

A2. Ορισμός σχολικό βιβλίο σελ. 16

A3. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

A4. α) $(c') = 0$

β) $(x^2)' = 2x$

ΘΕΜΑ Β

B1. Για το v_1 έχουμε

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 \Leftrightarrow v_1 + 15 + 11 + 8 + 6 = 50$$

$$\Leftrightarrow v_1 = 50 - 40$$

$$\Leftrightarrow v_1 = 10.$$

Με χρήση των τύπων $f_i = \frac{v_i}{v}$ και $N_i = N_{i-1} + v_i$ προκύπτουν και τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα.

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα $N_i\%$
0	10	20	10
1	15	30	25
2	11	22	36
3	8	16	44
4	6	12	50
Σύνολο	50	100	

B2.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 6}{50} = \frac{0 + 15 + 22 + 24 + 24}{50} = \frac{85}{50} = 1,7.$$

B3. Έχουμε άρτιο αριθμό παρατηρήσεων, άρα

$$\delta = \frac{x_{25} + x_{26}}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1,5.$$

B4. i. Είναι $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 88\%$.





ii. Έχουμε $y_i = x_i + 4$ και $\bar{y} = \bar{x} + 4 = 1,7 + 4 = 5,7$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $A_f = \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -6x^2 + 12x$ και

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow x(-6x + 12) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2.$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		-	0	+	0	-	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Άρα

- f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$
- f γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$
- f γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$

Γ2. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 0 το $f(0) = \alpha$ και τοπικό μέγιστο στο 2 το

$$f(2) = -2 \cdot 8 + 6 \cdot 4 + \alpha = 8 + \alpha.$$

Το ημίθροισμα των $f(2)$ και $f(0)$ είναι -8 , άρα

$$\begin{aligned} \frac{f(2) + f(0)}{2} &= -8 \Leftrightarrow \frac{8 + \alpha + \alpha}{2} = -8 \\ &\Leftrightarrow \frac{8 + 2\alpha}{2} = -8 \\ &\Leftrightarrow 8 + 2\alpha = -16 \\ &\Leftrightarrow 2\alpha = -24 \\ &\Leftrightarrow \alpha = -12. \end{aligned}$$

Γ3. Για $\alpha = -12$ είναι $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(1, f(1))$ είναι

$$y = f'(1)x + \beta.$$

Είναι $f'(1) = -6 + 12 = 6$, άρα $y = 6x + \beta$ και αφού το $(1, f(1))$ είναι σημείο της C_f και σε εκείνο το σημείο υπάρχει επαφή της C_f με την εφαπτομένη, έχουμε

$$f(1) = 6 + \beta \Leftrightarrow -2 + 6 - 12 = 6 + \beta \Leftrightarrow \beta = -14.$$

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = 6x - 14$.





Γ4. Έχουμε

$$\begin{aligned}x \geq 2 &\stackrel{f \downarrow}{\iff} f(x) \leq f(2) \\&\iff -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \\&\iff -2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0 \\&\stackrel{:(-2)}{\iff} x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0.\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 0.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{1}{3}3x^2 + 2\lambda x + 7 = x^2 + 2\lambda x + 7$. Άρα

$$f'(1) = 0 \iff 1 + 2\lambda + 7 = 0 \iff \lambda = -4.$$

Δ2. Είναι $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3}$ με $f'(x) = x^2 - 8x + 7$. Είναι

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 8x + 7 = 0 \iff x = 7 \text{ ή } x = 1.$$

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f					

Δ3. Είναι $2020, 2025 \in (7, +\infty)$, άρα

$$2020 < 2025 \stackrel{f \uparrow}{\implies} f(2020) < f(2025) \Rightarrow f(2025) - f(2020) > 0.$$

Οι αριθμοί $\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \in (1, 7)$ και $f \downarrow$, άρα

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{2} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0.$$

$$\text{Άρα } A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)} > 0.$$





Δ4. Είναι

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - (2x - 8) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} \\&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} \\&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{3}^2} \\&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x-2} \\&= \lim_{x \rightarrow 2} (x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3}) \\&= -6 \cdot 2\sqrt{3} \\&= -12\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Επιμέλεια:

**Γιάννης Θεοδώρου
Μαργαρίτα Κυριτσάκη
Νίκος Βαρδουλάκης
Κατερίνα Πολάκη**

