



ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Φροντιστήριο Μέσης Εκπαίδευσης

2025 – 2026

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ Α**

A1 Απόδειξη (σχολικό)

A2 Θεώρημα (σχολικό)

Γεωμετρικά, δείχνει ότι η Cf τέμνει την ευθεία $\psi = \eta$ σ' ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$

A3 Ορισμός (σχολικό)

A4

1) Λ π.χ. Έστω η $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

η f είναι 1-1 (με ορισμό ή εύκολα απ' τη γραφική παράσταση) αλλά δεν είναι γν. μονότονη αφού η $f \uparrow$ στο $(-\infty, 0]$ και

$f \downarrow$ στο $(0, +\infty)$

2) Σ 3) Σ

4) Λ π.χ. Έστω η $f(x) = \begin{cases} 13, & x < 0 \\ 1908, & x > 0 \end{cases}$ Τότε πληρούνται οι προϋποθέσεις της πρότασης αλλά η f δεν είναι σταθερή στο Δ

ΘΕΜΑ Β

B1 $(\log)(x) = -xe^x$ άρα $f(g(x)) = -xe^x$

$$f(e^{-x}) = -xe^x (*)$$

Θέτω $\omega = e^{-x}$ με $\omega > 0$ και έχω: $\ln \omega = \ln e^{-x} \Leftrightarrow$

$$\ln \omega = -x \Leftrightarrow x = -\ln \omega$$

Αντικαθιστώ στην (*): $f(\omega) = -(-\ln \omega)e^{-\ln \omega} = \ln \omega \frac{1}{e^{\ln \omega}} = \frac{\ln \omega}{\omega}$

Άρα $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$



B2 Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'x - \ln x(x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$$

άρα

x	0	e	$+\infty$
f'		+	-
f		↗	↘

Η $f \uparrow$ στο $(0, e]$ και η $f \downarrow$ στο $[e, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = e$ το $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$

$$\underline{\text{An } x \in (0, e] = A1}$$

$$\text{το } f(A1) =$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(e) \right] = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right]$$

$$\alpha\text{φο}\acute{\upsilon} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \frac{1}{x} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

$$\underline{\text{An } x \in [e, +\infty) = A2} \text{ το } f(A2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e) \right] = \left(0, \frac{1}{e} \right]$$

$$\alpha\text{φο}\acute{\upsilon} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

DLH

$$\acute{\alpha}\rho\alpha f(A) = f(A1) \cup f(A2) = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right]$$

B3 $a > e$ και η $f \downarrow$ στο $[e, +\infty)$ άρα $a < a + 1 \Leftrightarrow f(a) > f(a + 1) \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} >$

$$\frac{\ln a(a+1)}{a+1} \Leftrightarrow (a+1)\ln a > a\ln(a+1) \Leftrightarrow \ln a^{a+1} > \ln(a+1)^a \Leftrightarrow a^{a+1} > (a+1)^a$$



B4 i) η g συνεχής και παραγωγίσιμη με $g'(x) = -e^x < 0$ άρα η $g \downarrow$ στο \mathbb{R} δηλαδή και 1-1 άρα αντιστρέψιμη

$$\psi = g(x) \Leftrightarrow \psi = e^{-x} \stackrel{\psi > 0}{\Leftrightarrow} \ln \psi = \ln e^{-x} \Leftrightarrow x = -\ln \psi$$

$$\text{Άρα } g(A) = (0, +\infty) = Ag^{-1} \text{ και } g^{-1}(x) = -\ln x, x > 0$$

$$\text{ii) } g^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$g^{-1}(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Άρα για $x > 1$ ή $g^{-1}(x) < 0$ και

$$E(\Omega) = \int_1^e |g^{-1}(x)| dx = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e \ln x (x)' dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} x dx = e \ln e - \ln 1 - [x]_1^e = e - (e - 1) = e - e + 1 = 1 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Για να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[0,2]$ πρέπει η f να' ναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγ/μη στο $(0,2)$. Η f είναι συνεχής για $x > 1$ (ως πολυωνυμική) και για $x < 1$ (ως άθροισμα συνεχών)

$$\text{Πρέπει ακόμα } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + a) = 1 + a = f(1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{άρα θα πρέπει} \\ \alpha = 1 + \beta \end{array} \right\} \text{ δηλαδή } \alpha = \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + \beta x) = 1 + \beta$$

Η f παραγωγίσιμη για $x > 1$ και για $x < 1$ άρα θα πρέπει ακόμα

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + \alpha - (1 + \alpha)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + \alpha - 1 - \alpha}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - (1 + \alpha)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} + \frac{\beta x - \beta}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} + \frac{\beta(x-1)}{x-1} \right] (*)$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{x-1} = e^0 = 1$$

DLH

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 + \beta$ και θα πρέπει $1 + \beta = 3 \Leftrightarrow \beta = 2$
 οπότε και $\alpha = 2$

Η εφαπτομένη της Cf στο $x_0 = 1$ είναι $(\varepsilon): \psi - f(1) =$
 $f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow \psi - 3 = 3(x - 1) \Leftrightarrow \psi - 3 = 3x - 3 \Leftrightarrow \psi = 3x$

$$\Gamma 2 \quad f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + 2x, & x < 1 \end{cases}$$

Η f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Επίσης, δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$ αφού είναι πολυωνυμική 3^{ου} βαθμού.

Ελέγγω για το $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-1} + 2x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + 2) = 0 + 2 = 2$$

DLH

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + 2x - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = 0$$

Άρα η $\psi = 2x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) + x\eta\mu 5x}{x^2 f(x) - 2x^3 + x^3 \eta\mu \frac{5}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{xf(x) + x\eta\mu 5x}{x^2} + \frac{x\eta\mu 5x}{x^2}}{\frac{x^2 f(x) - 2x^3}{x^2} + \frac{x^3 \eta\mu \frac{5}{x}}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} + \frac{\eta\mu 5x}{x}}{f(x) - 2x + x\eta\mu \frac{5}{x}} (*)$$

$$\left| \frac{\eta\mu 5x}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \right| |\eta\mu 5x| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{\eta\mu 5x}{x} \leq \left| \frac{1}{x} \right| \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{x} \right| \text{ και από το κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu 5x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x\eta\mu \frac{5}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu \frac{5}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu \frac{5}{x}}{\frac{5}{x}} 5 = \frac{5}{x} 5 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 5 \cdot 1 = 1$$

$$(*)L = \frac{2+0}{0+5} = \frac{2}{5}$$



Γ3 Για $x \leq 0$ η $f(x) = e^{x-1} + 2x$ συνεχής και παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^{x-1} + 2 > 0$ άρα η $f \uparrow$ στο $\Delta = (-\infty, 0]$ με $f(\Delta) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, \frac{1}{e}]$

Το $0 \in f(\Delta)$ άρα υπάρχει $x_0 \in (-\infty, 0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ και η $f \uparrow$ άρα το x_0 μοναδικό

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0-1} + 2x_0 = 0 \Leftrightarrow e^{x_0}e^{-1} + 2x_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{x_0}}{e} + 2x_0 = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2ex_0 = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\eta\mu x - x}{e^x + 2ex} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (\eta\mu x - x) \frac{1}{e^x + 2ex}$$

Όμως $|\eta\mu x| \leq |x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x_0 = 0$

Αν $x < 0$ τότε $-\eta\mu x < -x \Leftrightarrow 0 < \eta\mu x - x$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} (\eta\mu x - x) = \eta\mu x_0 - x_0 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} (e^x + 2ex) = e^{x_0} + 2ex_0 = 0$$

$$x > x_0 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(x_0) \Rightarrow f(x) > 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{e^x + 2ex} = +\infty$$

$$\text{Επομένως, } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\eta\mu x - x}{e^x + 2ex} = +\infty$$

Γ4 $M(x(t), \psi(t)) \in Cf$ άρα $\psi(t) = e^{x(t)-1} - 2x(t)$ με $x'(t) = 2$ μον/sec
 $f'(x) = e^{x-1} + 2$

$$\text{άρα } \lambda_\varepsilon = f'(x(t)) = e^{x(t)-1} + 2 = \varepsilon\varphi\omega(t)$$

άρα:

$$\begin{aligned} (\varepsilon\varphi\omega(t))' &= (e^{x(t)-1} + 2)' \\ \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} \omega'(t) &= (e^{x(t)-1} x'(t)) \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Για } t = t_0, \lambda_\varepsilon = f'(1) = 3 = \varepsilon\varphi\omega(t_0)$$

και ισχύει

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} = \varepsilon\varphi^2\omega(t_0) + 1 = 3^2 + 1 = 10$$

$$(*) \Rightarrow 10 \cdot \omega'(t_0) = e^{1-1} \cdot 2 \Rightarrow \omega'(t_0) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \text{ rad/sec.}$$

**ΘΕΜΑ Δ**

$$\Delta 1 \quad 2f\left(\frac{1}{2}\right) \ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{2}\right) \ln x - x + 1 \leq 0$$

Θεωρώ $\omega(x) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) \ln x = x + 1, x > 0$ και για $x = 1$ το $\omega(1) = 0$ άρα ξέρω ότι ισχύει $\omega(x) \leq \omega(1)$ δηλαδή η ω παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$, εσωτερικό του $(0, +\infty)$

και είναι παραγωγίσιμη με $\omega'(x) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{x} - 1$ άρα από Θ. Fermat $\omega'(1) = 0 \Leftrightarrow$

$$2f\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Πράγματι τότε

$$\omega(x) = \ln x - x + 1, x > 0 \text{ με } \omega'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

$$\omega'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\omega'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

x	0	1	$+\infty$
ω'		+	-
ω		↗	↘

και η ω έχει πράγματι μέγιστο για $x = 1$

$$\Delta 2 \quad f^2(x) + 2\ln 2xf(x) = x^2 - (\ln 2x)^2 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) + 2\ln 2xf(x) + (\ln 2x)^2 = x^2 \Leftrightarrow$$

$$x > 0$$

$$(f(x) + \ln 2x)^2 = x^2 \Leftrightarrow |f(x) + \ln 2x| = |x| = x \quad (*)$$

Θεωρώ $g(x) = f(x) + \ln 2x, x > 0$ η οποία είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $g(x) \neq 0$, $x > 0$ (αφού αν $g(x) = 0$ τότε $x = 0$, άτοπο) άρα η g διατηρεί πρόσημο στο $(0, +\infty)$ με

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + \ln 1 = \frac{1}{2} > 0, \text{ άρα και } g(x) > 0, x > 0$$

$$(*) \Rightarrow f(x) + \ln 2x = x \Leftrightarrow f(x) = x - \ln 2x, x > 0$$

$\Delta 3$ Έστω $M(x_0, f(x_0)), x_0 > 0$ το σημείο επαφής της (ε) με τη C_f , τότε θα ισχύει $\lambda_\varepsilon = f'(x_0) = \varepsilon \varphi 135^\circ \Leftrightarrow f'(x_0) = -1$

$$\text{Όμως } f'(x) = 1 - \frac{1}{2x} (2x)' = 1 - \frac{2}{2x} = \frac{x-1}{x}$$

$$\text{Θέλω } f'(x_0) = -1 \Leftrightarrow \frac{x_0-1}{x_0} = -1 \Leftrightarrow x_0 - 1 = -x_0$$

$$\Leftrightarrow 2x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \text{ και η εφαπτομένη είναι}$$

$$\psi - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \psi - \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \psi = -x + 1$$



$$\Delta 4 \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, άρα η f κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Η f συνεχής στο $[\alpha - 1, \alpha]$ και $[\alpha, \alpha + 1]$

f παραγωγίσιμη στο $(\alpha - 1, \alpha)$ και $(\alpha, \alpha + 1)$ με

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha - 1, \alpha)$ και $\xi_2 \in (\alpha, \alpha + 1)$ τ.ω.

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\alpha) - f(\alpha - 1)}{\alpha - (\alpha - 1)} = f(\alpha) - f(\alpha - 1)$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\alpha + 1) - f(\alpha)}{\alpha + 1 - \alpha} = f(\alpha + 1) - f(\alpha)$$

Όμως η f κυρτή άρα η $f' \uparrow$ στο $(0, +\infty)$ και

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$$

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\alpha - 1) &< f(\alpha + 1) - f(\alpha) \Leftrightarrow \\ 2f(\alpha) &< f(\alpha - 1) + f(\alpha + 1) \Leftrightarrow \\ f(\alpha) &< \frac{f(\alpha - 1) + f(\alpha + 1)}{2} \end{aligned}$$

$\Delta 5$ Η f κυρτή στο $(0, +\infty)$ και η $(\varepsilon): \psi = -x + 1$ εφαπτομένη της, άρα $f(x) \geq -x + 1, x > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \frac{1}{2}$

άρα, $e^x f(x) \geq e^x(-x + 1)$

$$\int_1^2 e^x f(x) dx > \int_1^2 (-xe^x + e^x) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 (-xe^x + e^x) dx = - \int_1^2 xe^x dx + \int_1^2 e^x dx =$$

$$= - \int_1^2 x(e^x)' dx + [e^x]_1^2 = -[xe^x]_1^2 + \int_1^2 e^x dx + e^2 - e$$

$$= -2e^2 + e + [e^x]_1^2 + e^2 - e = -2e^2 + e^2 - e + e^2$$

$$= 2e^2 - 2e^2 - e = -e$$

Άρα από την (1) ισχύει $\int_1^2 e^x f(x) > -e$

‘Φτάσε όπου δεν μπορείς’

