ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Φροντιστήριο Μέσης Εκπαίδευσης

2025 – 2026

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1) Έστω f συνάρτηση , συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ. **(Μονάδες 8)**

Α2) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία. **(Μονάδες 4)**

Α3) Έστω $f: A \to \mathbb{R}$.Πότε η f λέγεται συνάρτηση $1-1$ στο Α ; **(Μονάδες 3)**

Α4) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) δικαιολογώντας την απάντηση σας σε όσες είναι Λάθος.

1. Κάθε $1-1$ συνάρτηση στο Δ είναι και γνησίως μονότονη στο Δ.
2. Αν $f(x) > g(x)$ και υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$ τότε ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) \geq \lim_{x\to x_0} g(x)$.
3. Αν F παράγουσα της f στο Δ τότε και οι $G(x) = F(x) + c$ και $H(x) = F(x) - c$, όπου $c \in \mathbb{R}$ είναι επίσης παράγουσες της f στο Δ.
4. Έστω f ορισμένη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$=Δ , συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Τότε η f είναι σταθερή στο Δ .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Έστω $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = e^{-x}$ και $f = (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία $(f \circ g)(x) = -xe^{x}, x \in \mathbb{R}$.

B1) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$ **(Μονάδες 6)**

B2) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 7)

B3) Να δείξετε ότι $a^{a+1} > (a+1)^{a}$ για κάθε $\alpha > e$ **(Μονάδες 5)**

B4)

i) Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρεθεί η g^{-1}

(Μονάδες 3)

ii) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{g^{-1}}$, $x'x$ άξονα και την $x = e$

(Μονάδες 4)

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha & ,x \geqslant 1 \\ e^{x-1} + \beta x & ,x < 1 \end{cases}$

Γ1) Να βρεθούν τα α , β ώστε η f να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο [0,2] και στη συνέχεια να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$. **(Μονάδες 6)**

Αν $\alpha = \beta = 2$:

Γ2) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ασύμπτωτες της C_f και να υπολογιστεί το$L = \lim_{x \to -\infty} \frac{x(f(x)+\eta\mu 5x)}{x^2 f(x) - 2x^3 + x^3 \eta\mu \frac{5}{x}}$

Γ3) Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ άξονα σε μοναδικό $x_0 < 0$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \to x_0^+} \frac{\eta\mu x - x}{e^x + 2ex}$, αν υπάρχει, **(Μονάδες 6)**

Γ4) Ένα υλικό σημείο $M(x(t), \psi(t))$ κινείται πάνω στη C_f ,ξεκινώντας από το $(-2, f(-2))$ και φτάνοντας μέχρι το $(1, f(1))$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ είναι 2 μον./sec να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας ω που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο Μ, τη χρονική στιγμή t_0 που το Μ φτάνει στο $(1, f(1))$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- $2f\left(\frac{1}{2}\right)\ln x \le x-1$ για κάθε $x>0$
- $f^2(x)+2\ln 2\,xf(x)=(x-\ln 2\,x)(x+\ln 2\,x)$, $x>0$

Δ1) Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ **(Μονάδες 6)**

Δ2) Να βρεθεί ο τύπος της f Αν $f(x)=x-\ln 2\,x$, $x>0$ **(Μονάδες 6)**

Δ3) Να βρεθεί η εφαπτομένη της που σχηματίζει γωνία $\omega=135°$ με τον $x'x$ **(Μονάδες 3)**

Δ4) Να αποδείξετε ότι $f(a)<\frac{f(a-1)+f(a+1)}{2}$ για κάθε $\alpha>1$ **(Μονάδες 5)**

Δ5) Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 e^x f(x)dx > -e$ **(Μονάδες 5)**

'Φτάσε όπου δεν μπορείς'